

2 3 複合問題 ～三平方の定理・相似な図形～

学年		組		氏名	
----	--	---	--	----	--

- 1 下の図 I において、 $\triangle ABC$ は $\angle ACB = 90^\circ$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ の直角三角形、 $\triangle ABD$ は $\angle ADB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形とし、辺 AC と辺 BD との交点を E とします。

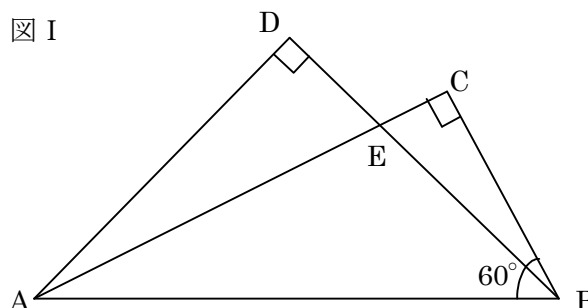
次の (1) ～ (3) の間に答えなさい。(H12宮城県入試問題)

- (1) $\angle DAC$ の大きさを求めなさい。

$$\angle DAB = 45^\circ, \angle CAB = 30^\circ \text{ より} \\ \angle DAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

15°

図 I



- (2) 辺 AD と辺 BC の長さの比を求めなさい。

特別な直角三角形の3辺の比より

$$\begin{aligned} AB : AD &= \sqrt{2} : 1 \\ AB &= \sqrt{2} AD \cdots \text{①} \\ AB : BC &= 2 : 1 \\ AB &= 2 BC \cdots \text{②} \end{aligned}$$

①, ②より

$$\sqrt{2} AD = 2 BC$$

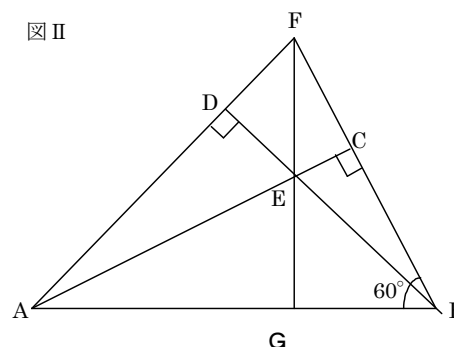
$\sqrt{2} : 1$

- (3) 右の図 II は、図 I において、辺 AD の延長と辺 BC の延長との交点を F とし、2 点 F 、 E を通る直線と辺 AB との交点を G としたものです。

次の①、②の間に答えなさい。

- ① 図 II において、 $\triangle AED$ と合同な三角形を答えなさい。また、 $\triangle AED$ とその三角形が合同であることを証明しなさい。

図 II



$\triangle AED$ と合同な三角形: $\triangle BFD$

【証明】(例)

$\triangle AED$ と $\triangle BFD$ において
 $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから

$$AD = BD \cdots \text{①}$$

$$\angle ADE = \angle BDF = 90^\circ \cdots \text{②}$$

$$\angle EAD = \angle FBD = 15^\circ \cdots \text{③}$$

①, ②, ③から

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AED \equiv \triangle BFD$$

- ② $BE = a$ とするとき、線分 DE の長さを a を用いた式で表しなさい。

$\triangle AED \equiv \triangle BFD$ から、 $DE = DF$ となり、 $\triangle DEF$ は直角二等辺三角形である。

よって、 $\angle BEG = \angle DEF = 45^\circ$ で、 $\angle EGB = 180^\circ - \angle BEG - \angle GBE = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

$$GB : BE = 1 : \sqrt{2} \text{ より、} GB = GE = \frac{1}{\sqrt{2}} a = \frac{\sqrt{2}}{2} a, AG : GE = \sqrt{3} : 1 \text{ より、} AG = \frac{\sqrt{2}}{2} a \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} a \text{ だから、} AB = AG + GB = \frac{\sqrt{6}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} a \text{ よって、} BD = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} a$$

$$\text{となり、} DE = BD - BE = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} a - a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} a$$

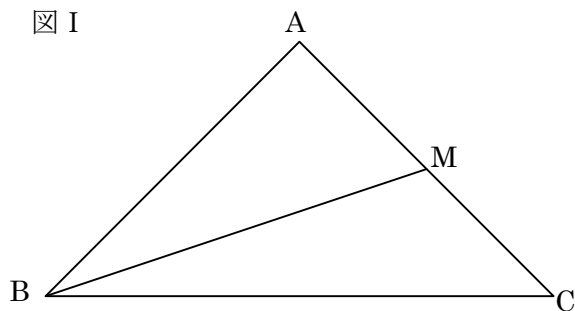
$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} a$

- 2 図 I のように、 $AB = AC = 4\text{cm}$ である直角二等辺三角形 ABC において、辺 AC の中点を M として、点 B と点 M を結びます。

次の (1) ~ (3) の間に答えなさい。

(H15宮城県入試問題)

図 I



- (1) $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

45°

- (2) 線分 BM の長さを求めなさい。

$\triangle ABM$ で、三平方の定理より

$$4^2 + 2^2 = BM^2$$

$$BM^2 = 20$$

$BM > 0$ より

$$BM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$2\sqrt{5} \text{ cm}$

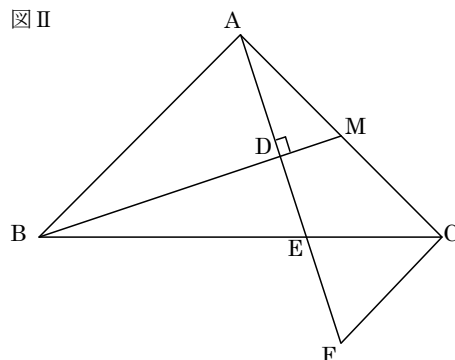
- (3) 図 II のように、図 I の直角二等辺三角形 ABC

の点 A を通り、線分 BM に垂直な直線をひきます。この直線と線分 BM との交点を D 、辺 BC との交点を E とします。

また、この直線と、点 C を通り辺 AB に平行な直線との交点を F とします。

次の①から③の間に答えなさい。

図 II



- ① $\triangle ABE \sim \triangle FCE$ を証明しなさい。

【証明】(例)

$\triangle ABE$ と $\triangle FCE$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AEB = \angle FEC \cdots \text{①}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BAE = \angle CFE \cdots \text{②}$$

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \sim \triangle FCE$

- ② 線分 AE の長さを求めなさい。

$\triangle ABM$ と $\triangle CAF$ において

$AB = CA$ (仮定) $\cdots \text{①}$

$\angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ ($AD \perp BM$)

$\angle FAC + \angle BAD = 90^\circ$ ($\angle BAC = 90^\circ$)

したがって、 $\angle ABD = \angle FAC \cdots \text{②}$

同様に $\angle DAB = \angle AMB$

$AB \parallel CF$ より、 $\angle DAB = \angle AFC$ (錯角)

したがって、 $\angle AMB = \angle AFC \cdots \text{③}$

①, ②, ③より、 $\triangle ABM \cong \triangle CAF$

よって、 $AM = CF = 2$

$\triangle ABE \sim \triangle FCE$ より $AE : EF = AB : FC$

$$= 4 : 2 = 2 : 1$$

つまり $AE = \frac{2}{3} AF$ となる。

AF を $\triangle AFC$ で三平方の定理より求めると

$$AF = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AE = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$\frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$

- ③ $\triangle BED$ の面積を求めなさい。

(3)①の問題より、 $BE : EC = 2 : 1$

$$\triangle ABE = \frac{2}{3} \triangle ABC \cdots \text{①}$$

(3)②の問題より、 $\triangle ADM$ と $\triangle ACF$ は2角が等しいので、相似である。

$$AM : AF = AD : AC$$

$$2 : 2\sqrt{5} = AD : 4$$

$$2\sqrt{5} AD = 8$$

$$AD = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$DE = AE - AD$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{15}$$

$$AE : DE = \frac{4\sqrt{5}}{3} : \frac{8\sqrt{5}}{15} = 5 : 2$$

$$\triangle BED = \frac{2}{5} \triangle ABE \cdots \text{②}$$

$$\triangle ABC = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8 \text{ であるから、}$$

①, ②より

$$\triangle BED = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times 8$$

$$= \frac{32}{15}$$

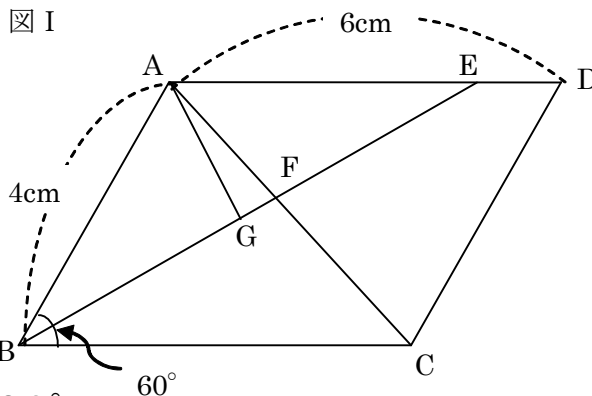
$\frac{32}{15} \text{ cm}^2$

- 3 図 I のように, $AB = 4\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$,
 $\angle ABC = 60^\circ$ である平行四辺形 $ABCD$ において,
 $\angle ABC$ の二等分線と辺 AD , 対角線 AC との交点をそれぞれ E , F とします。
 また $\angle DAB$ の二等分線と線分 BE との交点を G とします。

あとの (1) ~ (3) の間に答えなさい。

(H20宮城県入試問題)

図 I



- (1) 線分 AE と辺 BC の長さの比を求めなさい。

$\angle ABC$ の二等分線だから $\angle ABE = \angle EBC = 30^\circ$
 $AD \parallel BC$ より錯角は等しいから $\angle EBC = \angle AEB = 30^\circ$
 $\triangle ABE$ は二等辺三角形となり, $AE = AB = 4\text{cm}$
 $AE : BC = 4 : 6 = 2 : 3$

2 : 3

- (2) 線分 FG の長さを求めなさい。

※最初に EG の長さを求め, 次に EF を求め, その差を求めればよい。
 $\angle ABG = 30^\circ$, $\angle BAG = 60^\circ$ より $\angle AGB = 90^\circ$ となる。
 $\triangle ABG$ の 3 辺の比から, $AB : BG = 2 : \sqrt{3}$ $AB = 4$, $BG = GE$
 より, $GE = 2\sqrt{3}$
 $\triangle AFE \sim \triangle CFE$ であり, 相似比は $AE : CB = 4 : 6 = 2 : 3$
 $BE = 2GE = 4\sqrt{3}$ より, $EF = \frac{2 \times BE}{2+3} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$

したがって, $FG = GE - EF$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

- (3) 図 II は図 I において, 対角線 AC の
 垂直二等分線と線分 BE との交点を H
 としたものです。線分 FH の長さを求
 めなさい。

対角線 AC の垂直二等分線と対角線 AC との交点を I とする。
 $\angle AFG = \angle HFI$ (対頂角), $\angle AGF = \angle HIF = 90^\circ$

より, $\triangle AFG \sim \triangle HFI$
 $\triangle ABG$ において, 三平方の定理より

$$AG = \sqrt{(AB)^2 - (BG)^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

$\triangle AFG$ において, 三平方の定理より

$$FA = \sqrt{(AG)^2 + (FG)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{12}{25}} = \frac{4\sqrt{7}}{5}$$

A から BC に垂線をおろし, 交点を J とする。
 $\triangle ABJ$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形より 3 辺の比を使うと,

$$BJ = \frac{1}{2} AB = 2, \quad AJ = \sqrt{3} BJ = 2\sqrt{3}, \quad CJ = BC - BJ = 4$$

$\triangle AJC$ において三平方の定理から

$$AC = \sqrt{(AJ)^2 + (CJ)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7}$$

対角線 AC の垂直二等分線より, $AI = \frac{1}{2} AC = \sqrt{7}$

$$FI = AI - AF = \sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{5} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$FH : FA = FI : FG$ より

$$FH : \frac{4\sqrt{7}}{5} = \frac{\sqrt{7}}{5} : \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{5} FH = \frac{28}{25}$$

$$FH = \frac{14\sqrt{3}}{15}$$

$\frac{14\sqrt{3}}{15} \text{ cm}$

図 II

