

## 27 スペシャル問題

学年		組		氏名	
----	--	---	--	----	--

1 右の図 I のように、座標軸を決め、 $x$ 座標、 $y$ 座標がともに正の整数となる点をとります。

このうちの4点を頂点とし、4辺がそれぞれ  $x$  軸または  $y$  軸に平行になるような長方形をつくります。たとえば、縦の長さが3、横の長さが4の長方形をつくると、図 II のようになります。このとき、長方形の内部にある点は6個で、周上にある点は14個です。

次の(1)~(3)の間に答えなさい。

- (1) 図 II の長方形について、縦の長さはそのままで、横の長さを半分にしたとき、長方形の内部にある点と周上にある点はそれぞれ何個になりますか。

内部	<b>2</b>	個	周上	<b>10</b>	個
----	----------	---	----	-----------	---

- (2) 内部にある点が15個の長方形をつくるとき、周上にある点は、何個の場合と何個の場合が考えられますか。

<b>20</b>	個の場合と	<b>36</b>	個の場合
-----------	-------	-----------	------

図 I

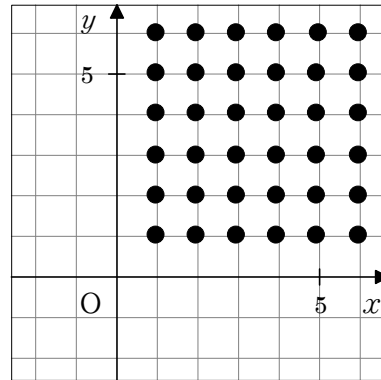
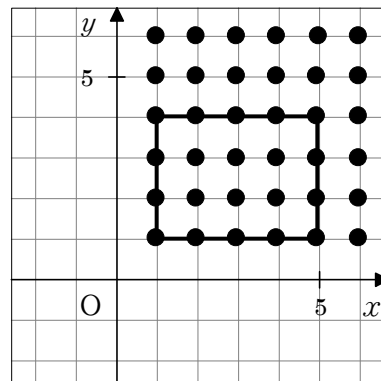


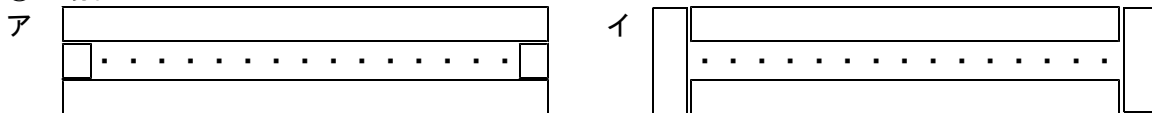
図 II



- ① ..... と15個が長方形の内部で一列に並ぶ場合と  
 ② ..... 3個, 5個と長方形の形に並ぶ場合がある。  
 .....  
 .....

この周りにさらに点が並んで長方形の周ができるので

①の場合は



ア 横に17が2カ所(上下) 縦に1が2カ所(左右) で36個  
 (イのように横に15が2カ所, 縦に3が2カ所 と考えてもよい)

②の場合は



ア 横に7が2カ所(上下), 縦に3が2カ所(左右) で20個  
 (イのように横に5が2カ所, 縦に5が2カ所 と考えてもよい)

- (3) 図Ⅲのように、縦の長さが  $a$ 、横の長さが  $b$  の長方形をつくりました。

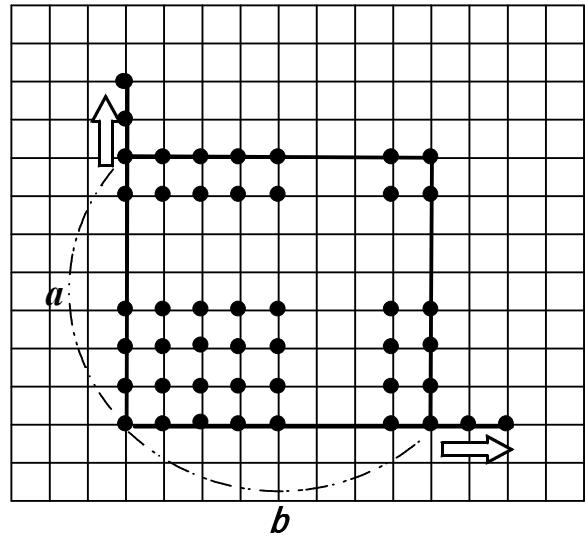
この長方形の横の長さを  $x$  軸の正の向き（右）に2のぼし、縦の長さを  $y$  軸の正の向き（上）に2のぼすとき、長方形の周上にある点は、もとの長方形の周上にあった点の個数と比べて何個増えますか。

ただし、 $a$ 、 $b$  はともに正の整数とします。

横に2伸ばすと、上下の辺で2個×2カ所で4個増える。

縦も同様に、左右の辺で2個×2カ所で4個増える。したがって  $4 + 4 = 8$  個となる。

図Ⅲ



8 個

- 2 妹は、図書館に向かって家を午後4時10分に出発し、毎分50mの速さで進みました。兄は、妹より6分遅れて家を出発し、同じ道を追いかけてきました。

次の(1)、(2)の間に答えなさい。

- (1) 兄は、家を出発してから20分後に、図書館への道の途中で妹に追いつきました。2人がそれぞれ一定の速さで進むものとして、下の①～③にあてはまる数を求めなさい。

兄が妹に追いついた時刻は午後4時①分で、家からの道のりは②mの地点です。  
また、兄の進む速さは毎分③mということになります。

兄は、妹が出発してから6分後に出発し、20分後に追いついている。つまり、妹が出発した時刻から、26分後ということになるので、時刻は午後4時36分となる。

兄の進んだ道のりは、妹の歩いた道のりと同じなので  $50 \times 26 = 1300$  となる。

兄は、自分が家を出発してから20分後に妹に追いついているので、兄の速さは、 $1300\text{m}$ の道のりを20分で進む速さということになる。  
 $1300 \div 20 = 65$

①	<b>36</b>
②	<b>1300</b>
③	<b>65</b>

- (2) 妹に追いついた兄と妹は、いっしょに歩いて午後4時50分に図書館に着きました。兄と妹の進む速さを毎分50mとして、家から図書館までの道のりを求めなさい。

4時36分に追いついた後、一緒に歩いて4時50分に図書館に到着しているの、一緒に歩いている時間は14分となる。速さは毎分50mなので、  
道のり =  $50 \times 14$

$$= 700\text{m} \text{ となる。}$$

したがって  $1300 + 700 = 2000\text{m}$

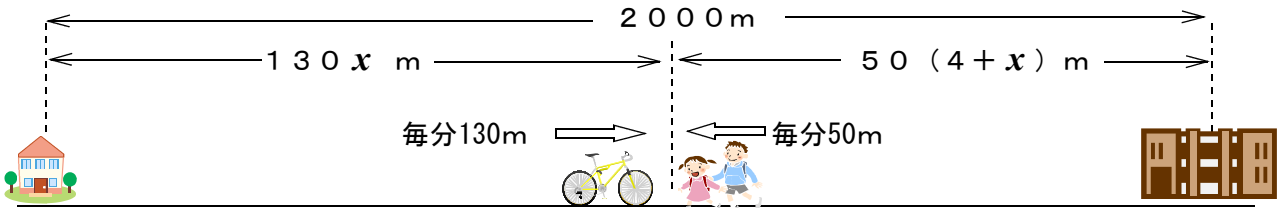
2000 m

(3) 図書館で本を借りた二人は、午後5時に図書館を出て、来たときと同じ道を歩いて家に向かいました。母親は二人を迎えに行くことにして、自転車で午後5時4分に家を出発し、二人が通ったのと同じ道を進みました。

二人の進む速さを毎分50m、母親の自転車の速さを毎分130mとすると、母親が家を出発してから何分後に二人と出会いますか。 $x$ 分後に会うとして方程式をつくって求めなさい。

方程式

$$130x + 50(4+x) = 2000$$



母親が進む道のりは  $130 \times x = 130x$

兄と妹は、出発した時刻が5時、母親が出発した時刻が5時4分なので、母親よりも4分長く歩いていることになる。よって、兄と妹が歩いた時間は  $4+x$  と表せる。

兄と妹が歩いた道のりは  $50(4+x)$

家から図書館までは2000mなので方程式は  $130x + 50(4+x) = 2000$  となる。

$$\begin{aligned} 130x + 50(4+x) &= 2000 \\ 130x + 200 + 50x &= 2000 \\ 130x + 50x &= 2000 - 200 \\ 180x &= 1800 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

10 分後

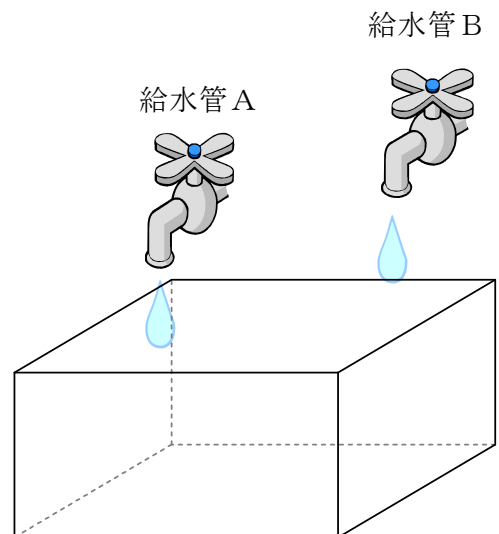
3 右の図のように、直方体の水そうと、一定の割合で給水する2つの給水管AとBがあります。

空の状態のこの水そうに、給水管Aだけを使って給水すると、給水しはじめてから15分後に満水になりました。下の表Iは、このときの、給水しはじめてからの時間  $x$  とそれとともなって変わる水の量  $y$  との関係を表したものです。

あとの間に答えなさい。

表 I

$x$ (分)	0	1	2	3	.....	15
$y$ (L)	0	2	4	6	.....	<input type="text"/>



(1) 太郎君は、表Iから分かることを、次のようにまとめました。①~③の  にあてはまる数やことばを答えなさい。

- 給水管 A から水そうに入る水の量は毎分  $\boxed{\text{①}}$  L です。
- この水そうは  $\boxed{\text{②}}$  L で満水になります。
- $x$  と  $y$  はともなって変化し、 $x$  の値を決めると、それにつれて  $y$  の値もただ 1 つに決まるから、 $y$  は  $x$  の  $\boxed{\text{③}}$  であるといえます。

表から 1 分で水そうに水が 2 L 入ることが分かるので毎分 2 L となる。  
15 分後に満水になるので  $2 \times 15 = 30$  L

①	2
②	30
③	関数

(2) 太郎君がまとめた内容を読んだ花子さんは、表 I について、 $y$  を  $x$  の式で表して、次のようにまとめました。①～④の  $\boxed{\phantom{00}}$  にあてはまる数や式を答えなさい。

- $y$  を  $x$  の式で表すと  $\boxed{\phantom{00}} \text{①}$  となります。
- $y$  は  $x$  に比例します。比例定数は  $\boxed{\phantom{00}} \text{②}$  です。
- $y$  の変域は  $0 \leq y \leq \boxed{\phantom{00}} \text{③}$  です。

1 分間で 2 L 入るので  $y = 2x$   
満水は 30 L なので、 $y$  の値は 30 以下である。

①	$y = 2x$
②	2
③	30

(3) この水そうを空の状態にして、もう一度給水してみました。今度は、はじめの 4 分間は給水管 A と B 両方から給水し、そのあと給水管 A を閉じて、給水管 B のみから給水しました。空の状態から給水しはじめて満水になるまでの時間は、14 分 40 秒でした。  
給水管 B から水そうに入る水の量は毎分何 L ですか。答えを求めるまでの過程も書きなさい。

給水管 B から毎分  $x$  L の水が出るとする。  
給水管 A からは毎分 2 L の水が出るから、  
はじめの 4 分間で水そうに入る水の量は  $4(2+x)$  L  
給水管 B のみで給水した時間は  
 $14 \text{ 分 } 40 \text{ 秒} - 4 \text{ 分} = 10 \text{ 分 } 40 \text{ 秒} = \frac{32}{3} \text{ 分}$

だから、その間に水そうに入る水の量は  $\frac{32}{3}x$

30 L で満水だから

$$4(2+x) + \frac{32}{3}x = 30$$

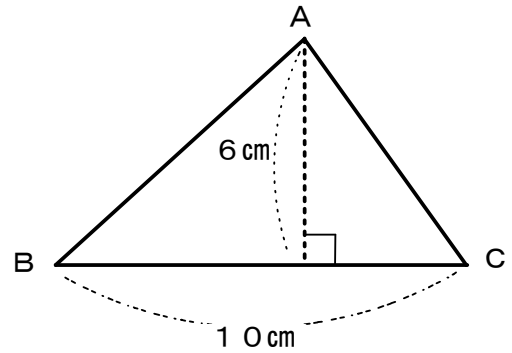
この方程式を解いて  $x = \frac{3}{2}$

答え 毎分 1.5 L

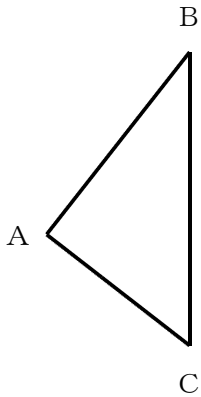
4 右の図のような、底辺が10 cm、高さが6 cmの三角形ABCがあります。

この三角形を辺BCを回転の軸として1回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。

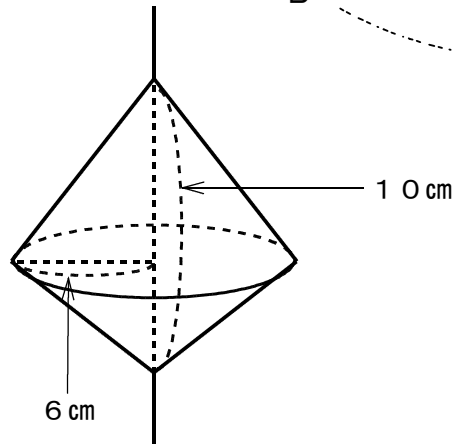
ただし、円周率は $\pi$ とします。



見やすいように縦に表します。



BCを軸として回転させるので右のように2つの円錐をつなげたような立体ができる。



$120\pi \text{ cm}^3$
-----------------------

上の円錐の高さを $a$ 、下の円錐の高さを $b$ とする。このとき  $a + b = 10$  が成り立っている。

$$\begin{aligned} \text{上の円錐の体積は } V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times a & \text{下の円錐の体積は } V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times b \\ &= 12\pi \times a & &= 12\pi \times b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{従って、立体の体積は } V &= 12\pi \times a + 12\pi \times b \\ &= 12\pi \times (a + b) & a + b &= 10 \text{ なので} \\ &= 12\pi \times 10 \\ &= 120\pi \end{aligned}$$

となる。